

Chapitre III – Les suites

Exercice 1 : Calculer les termes u_0, u_1, u_2, u_3 et u_{10} des suites :

a) $u_n = 2n$ b) $u_n = 2n+1$ c) $u_n = n^2$ d) $u_n = (-1)^n$ e) $a_n = \frac{1}{n+1}$

Exercice 2 : Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4 des suites :

a) $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_{n+1} = -2 \times u_n + 5 \\ u_0 = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n} \\ u_0 = 65536 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_n = u_{n-1}^2 + 1 \\ u_1 = 1 \end{cases}$

Exercice 3 : On définit la suite de Syracuse de la manière suivante :

$$S_{n+1} = \begin{cases} \frac{S_n}{2} & \text{si } S_n \text{ est pair} \\ 3S_n + 1 & \text{si } S_n \text{ est impair} \end{cases}$$

- a) Calculer les 6 premiers termes si $S_0 = 1$. Sans calculer, donner la valeur de S_{9999}
b) Calculer les 8 premiers termes si $S_0 = 3$

Exercice 4 : On définit la suite suivante par récurrence u_{n+1} = le dernier chiffre de u_n^2

- a) Calculer les 4 premiers éléments de la suite quand $u_0 = 2$
b) Même chose pour $u_0 = 5$
c) Selon vous, le comportement observé de la suite sera-t-il le même pour tout nombre de départ entier. Justifier.

Exercice 5 : On donne la suite définie par récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 1$

- 1) Calculer les 5 premiers termes de la suite si $u_0 = -1$
2) a) Programmer l'algorithme suivant :

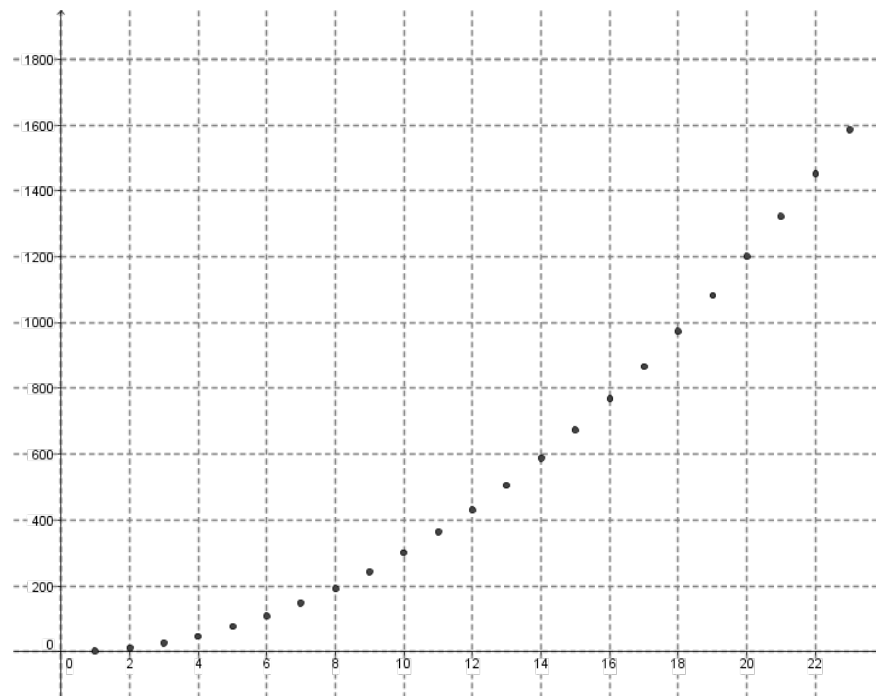
```
PROGRAM: SUITE
: Promet U
: For(I,1,15)
: 2*U+1 → U
: End
: Disp U
```

- b) Décrire son but et son fonctionnement.
c) Calculez u_{15} si $u_0 = 2$
3) Modifiez l'algorithme de manière à calculer u_{100} . Donnez une valeur approchée avec 3 chiffres significatifs.

Exercice 6 : On définit la suite $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}$. Elle permet d'approximer le nombre $\sqrt{2}$.

- 1) On prend $u_0 = 1$ comme premier terme . Calculer u_1, u_2 et u_3 .
2) En utilisant une calculatrice programmable, trouver le premier terme u_N qui a les 5 premières décimales correctes pour approximer $\sqrt{2}$

Exercice 7 : Le nuage de points ci-dessous représente les 26 premiers termes d'une suite (u_n) .
Par lecture graphique, déterminer un entier n pour lequel $u_n > 10^3$.

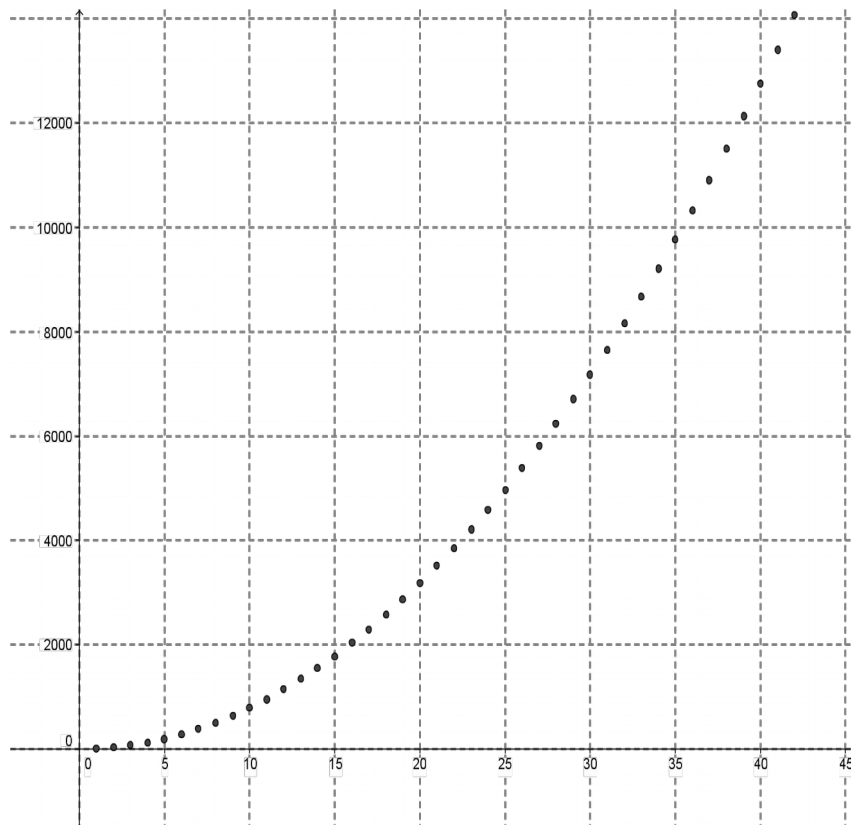


Exercice 8 : Soit la suite définie explicitement pour tout entier n par $u_n = 5n^3 + n^2 - 10$

1) Afficher à l'aide d'une calculatrice graphique, les valeurs de la suite, conjecturer la limite de (u_n) lorsque n devient grand.

2) A l'aide d'un tableau, trouver le premier entier n pour lequel $u_n > 10^5$.

Exercice 9 : Soit la suite définie explicitement pour tout entier n par $u_n = 8n^2 - n$. On peut visualiser ci-dessous les 40 premiers termes de cette suite.



1) Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de cette suite ?

2) Par lecture graphique, trouver un entier N pour lequel $u_N > 10^4$.

Exercice 10: Soient les suites (u_n) définies par :

a) $u_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) $u_n = -16\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) $u_n = 3,2^n$

d) $u_n = -3,2^n$

e) $u_n = -3(-2)^n$

f) $u_n = -16\left(\frac{-1}{2}\right)^n$

1) Pour chaque suite, calculer à l'aide d'un tableur, les 9 premiers termes et tracer la représentation graphique de la suite.

2) Conjecturer sur le sens de variation et la limite de chaque suite.

Exercice 11: Soient les suites (u_n) définies par :

a) $u_n = \frac{2n^2}{n^2 + 1}$

b)
$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{3} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{5} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \\ u_0 = -16 \end{cases}$$

1) Pour chaque suite, calculer à l'aide d'un tableur, les 20 premiers termes et conjecturer sur le sa limite quand n devient grand.

Exercice 12: Le service commercial d'un journal a constaté que chaque année, il enregistre 1000 nouveaux abonnés, mais que la moitié des anciens ne renouvellent pas leur abonnement. On suppose que cette évolution perdure. En l'an 2010, le journal comptait 4000 abonnés.

1) Si u_n est le nombre d'abonné en $2010 + n$, quel sera en fonction de u_n le nombre d'abonnés u_{n+1} de l'année $2010 + (n + 1)$.

2) À l'aide d'un tableur, calculer le nombre d'abonnés au cours des années 2010 à 2015 et donner la représentation graphique de cette suite.

3) Vers quelle valeur va se stabiliser le nombre d'abonnés ? Répondre en utilisant un vocabulaire mathématique.

Exercice 13: Dans un étang en 2010, on a dénombré 10000 poissons. On estime qu'à la fin de chaque année, la population n'est égale qu'à un quart de la population de début d'année compte tenu de la pêche, de la mortalité et de la reproduction. À la fin de chaque année, on réintroduit 2000 poissons (alevinage).

1) Si u_n est la population à la fin de l'année $2010 + n$ (avant alevinage), quelle sera la population u_{n+1} à la fin de l'année $2010 + (n + 1)$ (avant alevinage) ?

2) À l'aide d'un tableur, calculer la population à la fin de chaque année (avant alevinage) jusqu'en 2025 et donner la représentation graphique de la suite u_n .

3) Vers quel nombre la population semble-t-elle se stabiliser ?

Exercice 14 : Soit (a_n) la suite définie explicitement pour tout n par $a_n = (-1)^n$.

1) À l'aide d'un tableau de valeurs, conjecturer sur la limite éventuelle de la suite (a_n) .

2) Même question avec la suite $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 15 : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . Calculer les 4 premiers termes si :

a) $q = -3$ et $u_0 = 5$

b) $q = \frac{1}{4}$ et $u_0 = 3$

c) $q = 2$ et $u_0 = 11$

Exercice 16 : Dans une suite géométrique, le premier terme est 2, le sixième est 64. La raison est-elle -2 , $\frac{1}{2}$ ou 2 ?

Exercice 17 : Indiquez si les suites suivantes sont géométriques ou non. Si oui, précisez sa raison et son premier terme :

a) $a_n = 2^n$ b) $b_n = \frac{1}{n^3}$ c) $c_n = 2n+1$ d) $d_n = -3 \times \frac{1}{5^n}$ e) $e_n = 3^{n+1}$

Exercice 18 : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . Calculer les termes u_1 et u_{10} si :

a) $q = -1$ et $u_0 = 5$ b) $q = \frac{1}{2}$ et $u_0 = 1$ c) $q = 3$ et $u_0 = 2$ d) $q = 0,1$ et $u_0 = -2$

Exercice 19 : Le but est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif : le carbone 14.

Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$, N_1 le nombre d'atomes un siècle après et de manière générale N_k au bout de k siècles. Le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement, environ de 1,24% par siècle.

1) Donner l'expression de N_{k+1} en fonction de N_k , en déduire la nature de la suite (N_k) puis l'expression de N_k en fonction de N_0 et k .

2) Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. À leur mort, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. Des archéologues ont retrouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 40% de celle d'un os actuel de même nature.

Calculer l'âge de ces fragments. On utilisera la calculatrice pour cette question.

Exercice 20 : En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23% de son intensité lumineuse.

1) Soit I_0 l'intensité d'un rayon à son entrée dans la plaque et I_1 son intensité à la sortie. Exprimer I_1 en fonction de I_0 .

2) On superpose n plaques de verre identiques. On note I_n l'intensité du rayon à la sortie de la n -ième plaque.

a) Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} .

b) Quelle est la nature de la suite (I_n) ?

c) Donner son premier terme et sa raison. En déduire l'expression de I_n en fonction de I_0 et n .

3) Quelle est l'intensité initiale I_0 d'un rayon lumineux dont l'intensité lumineuse après avoir traversé 4 plaques est égale à 15 ?

4) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre minimal de plaques qu'un rayon lumineux doit traverser pour que son intensité sortante soit inférieure au quart de son intensité entrante.